Jochen Weber

Einführung Differenzialrechnung

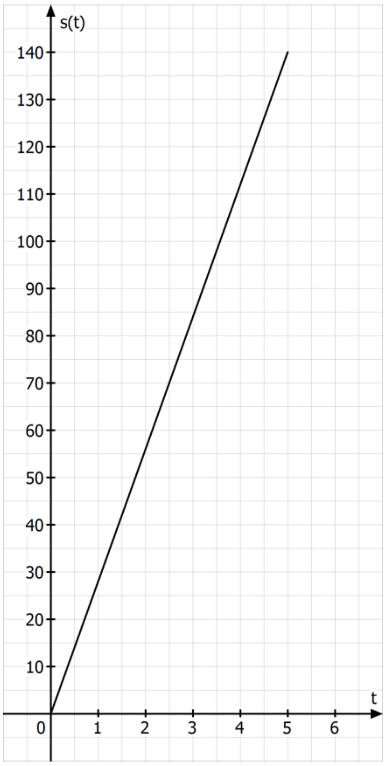
Beispiele:

(1) Ein Auto fährt fünf Sekunden lang mit konstanter Geschwindigkeit

Wertetabelle:

Zeit in Sekunden	0	1	2	3	4	5
Strecke in Meter	0	28	56	84	112	140

Graph (s-t-Diagramm):

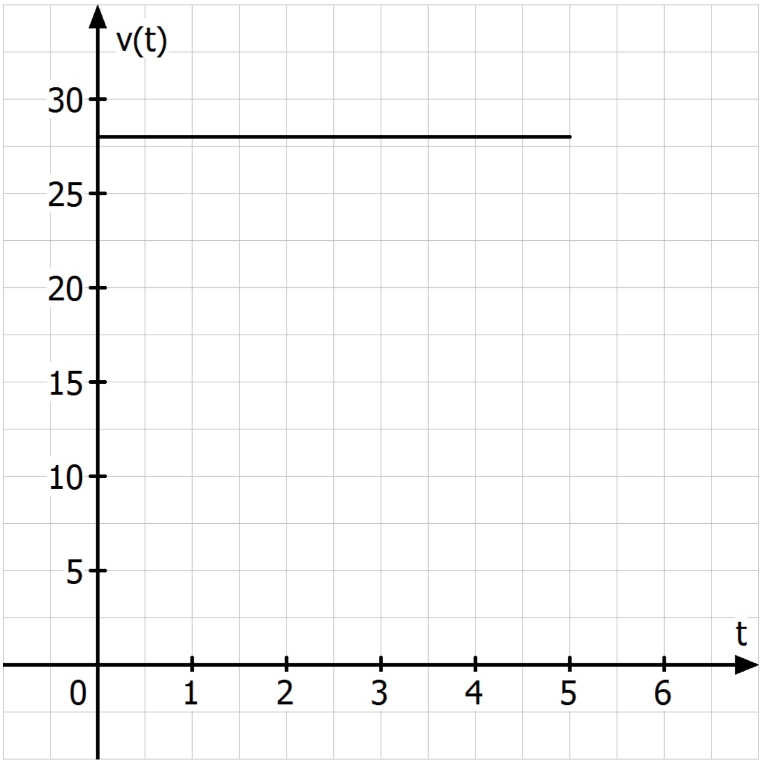


Berechnung der konstanten Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\text{zurückgelegte Strecke}}{\text{vergangene Zeit}} \Rightarrow v = \frac{140\,m}{5\,sec} = 28\frac{m}{sec}$$

<u>Wertetabelle und Graph der Geschwindigkeit:</u>

Zeit in Sekunden	0	1	2	3	4	5
Geschwindigkeit in m/sec	28	28	28	28	28	28



Zusammenhang zwischen s-t-Diagramm und v-t-Diagramm:

Die Steigung im s-t-Diagramm entspricht dem Funktionswert im v-t-Diagramm.

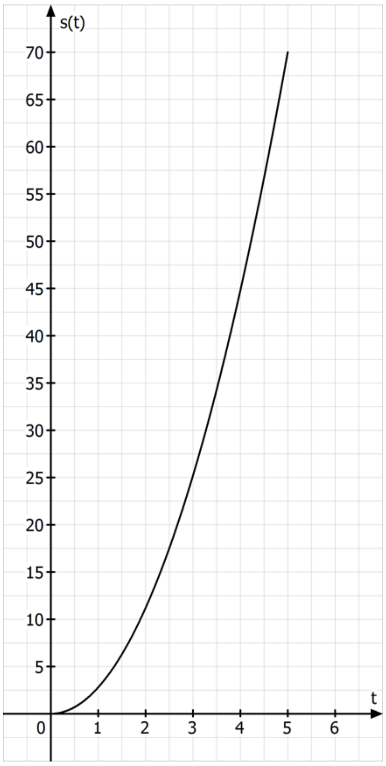
(2) Ein Auto beschleunigt fünf Sekunden lang

<u>Wertetabelle:</u>

Zeit in Sekunden	0	1	2	3	4	5
Strecke in Meter	0	2,8	11,2	25,2	44,8	70,0

Für die Strecke s gilt: $s(t) = 2{,}8t^2$

Graph (s-t-Diagramm):



Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos in den ersten fünf Sekunden:

$$\text{Geschwindigkeit}=\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{vergangene Zeit}}$$

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{70-0}{5-0}=\frac{70}{5}=14\frac{m}{sec}$$

Bestimmen Sie nun die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos
a) innerhalb der ersten Sekunde
b) innerhalb der zweiten und dritten Sekunde
c) innerhalb der ersten und vierten Sekunde

$$a)\, v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{2{,}8-0}{1-0}=\frac{2{,}8}{1}=2{,}8\frac{m}{sec}$$

$$b)\, v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{25{,}2-11{,}2}{3-2}=\frac{14}{1}=14\frac{m}{sec}$$

$$c)\, v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{44{,}8-2{,}8}{4-1}=\frac{42}{3}=14\frac{m}{sec}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht der **Steigung** der Sekante.

Das Steigungsdreieck ergibt sich aus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und wird Differenzenquotient genannt.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit genügt allerdings nicht immer unseren Anforderungen. So stellt sich z.B. die Frage, ob man zum Zeitpunkt zwei Sekunden innerorts bei einer Radarmessung geblitzt wird.
Wichtig hierbei ist die tatsächliche Geschwindigkeit zum Zeitpunkt zwei Sekunden (Momentangeschwindigkeit).

<u>Bestimmung der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt zwei Sekunden mit Hilfe von Durchschnittsgeschwindigkeiten ($s(t)=2{,}8t^2$):</u>

Intervall	Durchschnittsgeschwindigkeit
0 - 2 2 - 4	$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{11{,}2-0}{2-0}=5{,}6\frac{m}{sec}$ $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{44{,}8-11{,}2}{4-2}=16{,}8\frac{m}{sec}$
$1{,}5-2$ $2-2{,}5$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{11{,}2-6{,}3}{2-1{,}5}=9{,}8\frac{m}{sec}$ $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{17{,}5-11{,}2}{2{,}5-2}=12{,}6\frac{m}{sec}$
$1{,}9-2$ $2-2{,}1$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{11{,}2-10{,}108}{2-1{,}9}=10{,}92\frac{m}{sec}$ $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{12{,}348-11{,}2}{2{,}1-2}=11{,}48\frac{m}{sec}$

<u>Vermutung:</u> Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 2 sec beträgt 11,2 m/sec.

<u>Schreibweise:</u> $\dot{s}(2)=11{,}2\frac{m}{sec}$

<u>allgemein:</u> $\dot{s}(t_0)=\lim\limits_{\substack{<\\ t\to t_0}}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\substack{>\\ t\to t_0}}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (lokale Änderungsrate)

Berechnung der Momentangeschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt 2 Sekunden mit Hilfe des Differenzialquotienten ($s(t) = 2{,}8t^2$):

Als Differentialquotient bezeichnet man $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

Für eine Funktion f kann also die lokale Änderungsrate bei x_0 (Steigung in einem Punkt x_0) mit dem Differenzialquotient $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bestimmt werden.

Annäherung an den Zeitpunkt 2 Sekunden von links:

$$\lim_{\substack{< \\ t \to 2}} \frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \lim_{\substack{< \\ t \to 2}} \frac{2{,}8t^2 - 2{,}8 \cdot 2^2}{t-2} = \lim_{\substack{< \\ t \to 2}} \frac{2{,}8(t^2-4)}{t-2} =$$

$$\lim_{\substack{< \\ t \to 2}} \frac{2{,}8(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{\substack{< \\ t \to 2}} [2{,}8(t+2)] = 11{,}2$$

Annäherung an den Zeitpunkt 2 Sekunden von rechts:

$$\lim_{\substack{> \\ t \to 2}} \frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \lim_{\substack{> \\ t \to 2}} \frac{2{,}8t^2 - 2{,}8 \cdot 2^2}{t-2} = \lim_{\substack{> \\ t \to 2}} \frac{2{,}8(t^2-4)}{t-2} =$$

$$\lim_{\substack{> \\ t \to 2}} \frac{2{,}8(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{\substack{> \\ t \to 2}} [2{,}8(t+2)] = 11{,}2$$

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 2 Sekunden beträgt also $\mathbf{11{,}2\,\frac{m}{sec}}$.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 Sekunden.

Annäherung an den Zeitpunkt 3 Sekunden von links:

$$\lim_{\substack{<\\t\to 3}}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{\substack{<\\t\to 3}}\frac{2{,}8t^2-2{,}8\cdot 3^2}{t-3}=\lim_{\substack{<\\t\to 3}}\frac{2{,}8(t^2-9)}{t-3}=$$

$$\lim_{\substack{<\\t\to 3}}\frac{2{,}8(t-3)(t+3)}{t-3}=\lim_{\substack{<\\t\to 3}}[2{,}8(t+3)]=16{,}8$$

Annäherung an den Zeitpunkt 3 Sekunden von rechts:

$$\lim_{\substack{>\\t\to 3}}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{\substack{>\\t\to 3}}\frac{2{,}8t^2-2{,}8\cdot 3^2}{t-3}=\lim_{\substack{>\\t\to 3}}\frac{2{,}8(t^2-9)}{t-3}=$$

$$\lim_{\substack{>\\t\to 3}}\frac{2{,}8(t-3)(t+3)}{t-3}=\lim_{\substack{>\\t\to 3}}[2{,}8(t+3)]=16{,}8$$

2. Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 Sekunden.

Annäherung an den Zeitpunkt t_0 Sekunden von links:

$$\lim_{\substack{<\\t\to t_0}}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\substack{<\\t\to t_0}}\frac{2{,}8t^2-2{,}8t_0^{\;2}}{t-t_0}=\lim_{\substack{<\\t\to t_0}}\frac{2{,}8(t^2-t_0^{\;2})}{t-t_0}=$$

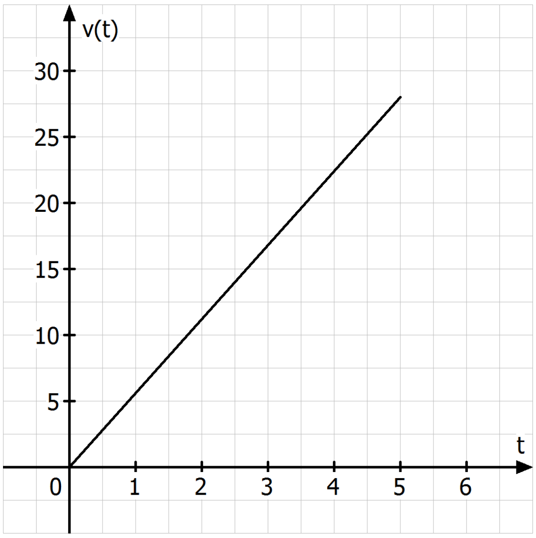
$$\lim_{\substack{<\\t\to t_0}}\frac{2{,}8(t-t_0)(t+t_0)}{t-t_0}=\lim_{\substack{<\\t\to t_0}}[2{,}8(t+t_0)]=5{,}6t_0$$

Annäherung an den Zeitpunkt t_0 Sekunden von rechts:

$$\lim_{\substack{>\\t\to t_0}}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\substack{>\\t\to t_0}}\frac{2{,}8t^2-2{,}8t_0^{\;2}}{t-t_0}=\lim_{\substack{>\\t\to t_0}}\frac{2{,}8(t^2-t_0^{\;2})}{t-t_0}=$$

$$\lim_{\substack{>\\t\to t_0}}\frac{2{,}8(t-t_0)(t+t_0)}{t-t_0}=\lim_{\substack{>\\t\to t_0}}[2{,}8(t+t_0)]=5{,}6t_0$$

3. Zeichnen Sie den Graphen der Momentangeschwindigkeit in das Koordinatensystem ein.



Jochen Weber

Regel für die Berechnung der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 aus der Ausgangsfunktion (Weg-Zeit-Funktion):

Wir wissen bereits:

Weg-Zeit-Funktion: $s(t)=2{,}8t^2$

$\Rightarrow$ Momentangeschwindigkeit: $v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=5{,}6t=2{,}8\cdot 2t$

Folgerung:

Weg-Zeit-Funktion s(t)	Momentangeschwindigkeit v(t)
$s(t)=28t$	$v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=28$
$s(t)=1{,}5\cdot t^3$	$v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=1{,}5\cdot 3t^2=4{,}5t^2$
$s(t)=1{,}7t^2$	$v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=1{,}7\cdot 2t=3{,}4t$
$s(t)=2{,}5t^4$	$v(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=2{,}5\cdot 4t^3=10t^3$

Allgemein gilt:

$$s(t)=a\cdot t^n \quad\Rightarrow\quad v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=a\cdot n\cdot t^{n-1}$$

Differenzierbarkeit von Funktionen

Definition:

Eine Funktion f heißt differenzierbar, wenn zu jedem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen die Steigung $m = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (Differenzialquotient) existiert.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$ an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar ist.

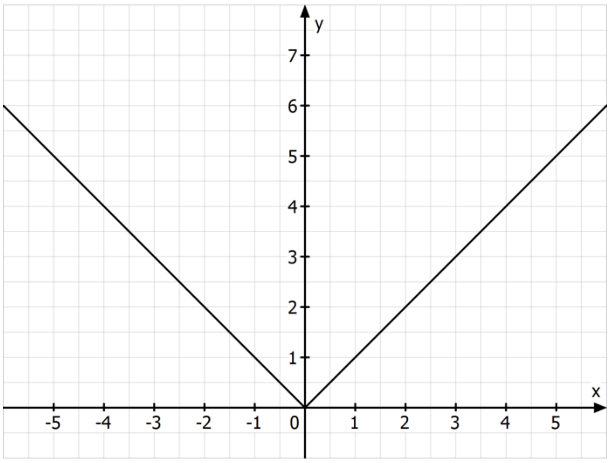
$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x - 0}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-1) = -1$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x - 0}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1) = 1$$

$\Rightarrow$ Man kann an den Graphen bei x = 0 keine eindeutige Tangente anlegen

$\Rightarrow$ f ist bei x = 0 nicht differenzierbar

Graph:



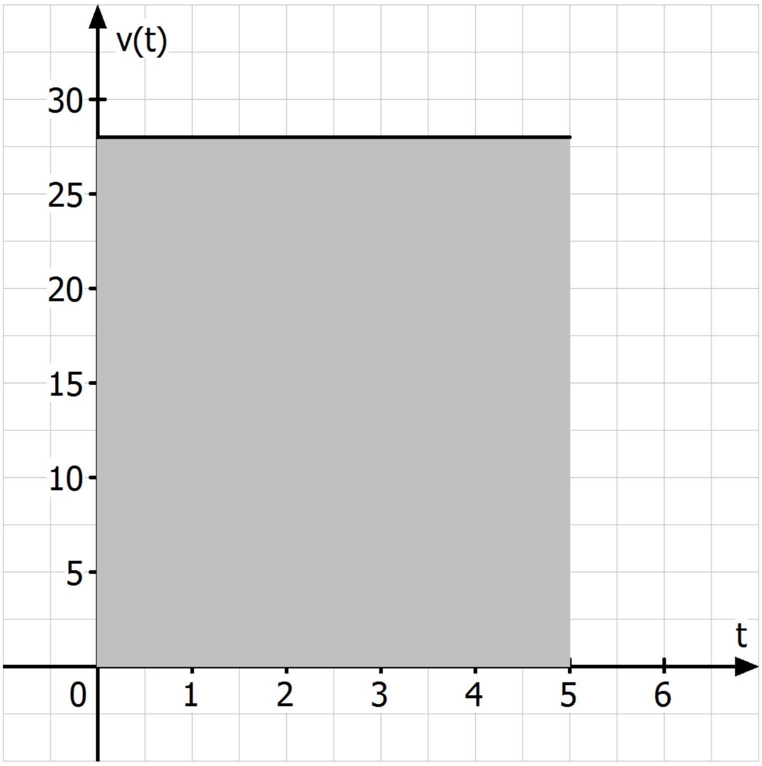
Folgerung:

Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 nicht differenzierbar, so macht sich dies am Graphen als „Knick" bemerkbar.

Umgekehrt kann man die zurückgelegte Strecke aus dem v-t-Diagramm ablesen.

(1) Ein Auto fährt fünf Sekunden lang mit der konstanten Geschwindigkeit von 28 m/sec:

Graph (v-t-Diagramm):



Überlegen Sie, welche Strecke das Auto in den ersten fünf Sekunden zurücklegt und kennzeichnen Sie im v-t-Diagramm, wo man die Strecke im v-t-Diagramm „sieht“.

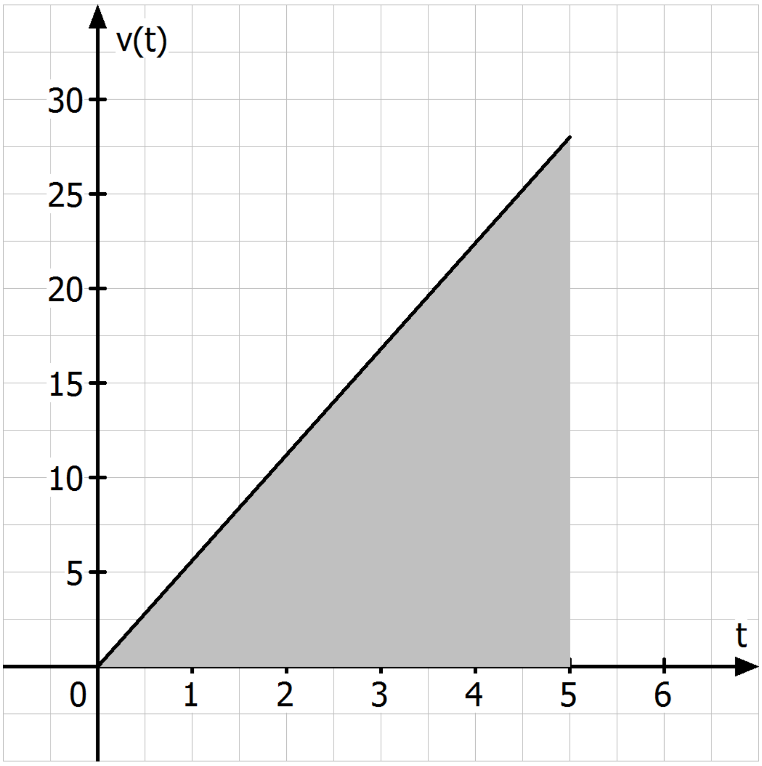
In einer Sekunde legt das Auto 28m zurück, also legt das Auto in fünf Sekunden eine Strecke von $28 \cdot 5 = 140\text{m}$ zurück.

<u>Folgerung:</u>

Die Strecke kann im v-t-Diagramm also als Rechtecksfläche veranschaulicht werden.

(2) Ein Auto beschleunigt fünf Sekunden lang ($s(t) = 2{,}8t^2$):

Graph (v-t-Diagramm): $v(t) = 5{,}6t$



Überlegen Sie, welche Strecke das Auto in den ersten fünf Sekunden zurücklegt und kennzeichnen Sie im v-t-Diagramm, wo man die Strecke im v-t-Diagramm „sieht".

<u>Folgerung:</u>

Die zurückgelegte Strecke des Autos kann im v-t-Diagramm wieder als Fläche unterhalb des Graphen von v(t) veranschaulicht werden Dreiecksfläche).

Berechnung der zurückgelegten Strecke:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 28 = 70m$$

Zur Kontrolle: $s(5) = 2{,}8 \cdot 5^2 = 70m$

Berechnung der zurückgelegten Strecke allgemein in Abhängigkeit von t:

$$A = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 5{,}6t = 2{,}8t^2$$

Damit gilt also: $s(t) = 2{,}8t^2$

Ergebnis:

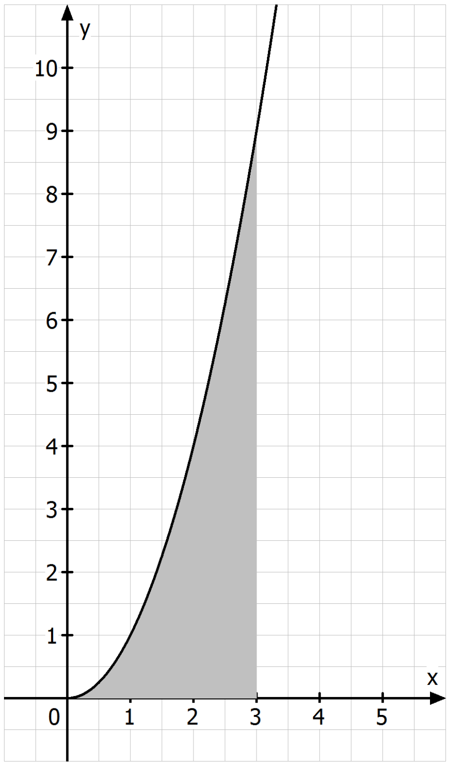
Die Fläche „unter der Kurve“ von $v(t) = 5{,}6t$ lässt sich mit der Formel $s(t) = 2{,}8t^2$ berechnen, deren Ableitung wieder den Term $v(t)$ ergibt.
Die Funktion $s(t)$ nennt man auch Stammfunktion zur Funktion $v(t)$.

Schreibweise: $s(t) = \int v(t)\,dt$

Berechnung der Strecke in den ersten fünf Sekunden mit Hilfe der Stammfunktion:

$$s(t) = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 5{,}6t\,dt = \left[2{,}8t^2\right]_0^5 = 2{,}8 \cdot 5^2 - 2{,}8 \cdot 0^2 = 70 - 0 = 70m$$

Anwendung: Berechnung der Fläche unter der Normalparabel $f(x) = x^2$:



Berechnung der Fläche unterhalb der Normalparabel im Bereich 0 und 3:

$$A = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = 9 - 0 = 9\text{FE}$$